Exo 1

Soient $R_1 \dots R_n$ n demi-droites qui partent de l'origine :

$R_j = [0;+\infty[\cdot v_j = \{ t \cdot v_j \mid t \in [0,+\infty[\}$, avec $v_j \in S^2$.

On montre que $\mathbb{R}^3 \setminus \bigcup R_j$ est homotopiquement équivalent à

$S^2 \setminus \{v_1 \dots v_n\}$.

En fait $S^2 \setminus \{v_1 \dots v_n\}$ est un retract par déformation de $\underbrace{\mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^{n} R_j}_{X}$

par l'application $r : X \to S^2 \setminus \{v_1 \dots v_n\}$,

$$x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

L'homotopie entre r et id est donnée par $r_t(x) = x \cdot \left(t + \frac{1-t}{\|x\|} \right)$;

$r_0 = r$ et $r_1 = \mathrm{id}$.

Donc $\pi_1(X) \simeq \pi_1(S^2 \setminus \{v_1 \dots v_n\}) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{v_1 \dots v_{n-1}\}) \simeq \mathbb{Z}^{*n-1}$

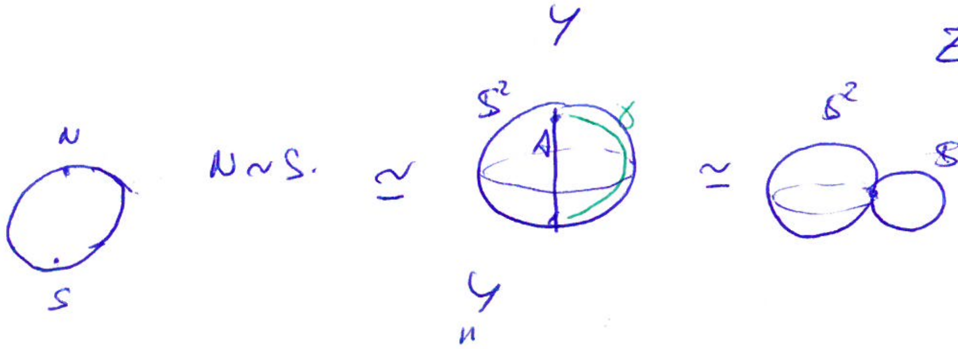
(vu en cours)

On peut le voir par Van Kampen avec $U \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{\pm 1\}$,

$V \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{n-1 \text{ points}\}$, $U \cap V \simeq S^1$, par récurrence sur n.

Ou par rétraction sur un bouquet de $n-1$ S^1.

Exo 2.

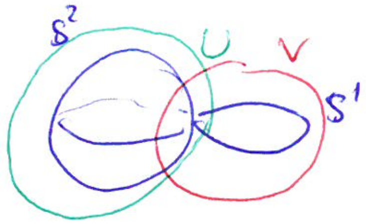
(a) $X \cong$ 

(b) On remarque que $X \simeq \mathbb{S}^2 \cup A$, où $A = [N,S] = \{(0,0)\} \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^3$

En fait X est obtenu ~~par~~ de Y par contraction de A, qui est contractile, et $\mathbb{S}^2 \cup A$ a une structure de complexe cellulaire.

D'autre part, en contractant un arc γ entre N et S sur la sphère, on a $Y \simeq Z \cong \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$.

Or, $\pi_1(\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ (application directe de Van Kampen).

En fait, si U est un voisinage de $\mathbb{S}^2$ et V de $\mathbb{S}^1$ comme en figure: 

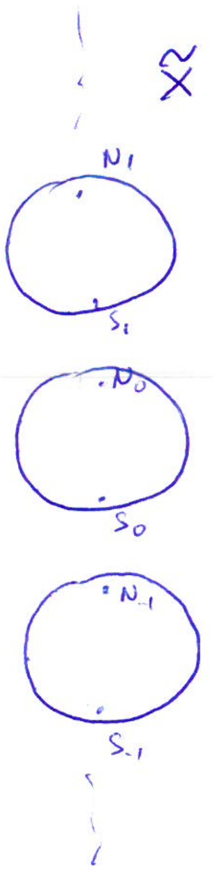
alors $U \simeq \mathbb{S}^2$, $V \simeq \mathbb{S}^1$ et $U \cap V \simeq \{p\}$

donc $\pi_1(\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^2) \underset{\pi_1(p)}{*} \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq 0 \underset{0}{*} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$.

(c) Pour construire le revêtement universel de X, on considère $\mathbb{Z}$-copies de $\mathbb{S}^2$, qu'on dénote par $\mathbb{S}^2_n$, $n \in \mathbb{Z}$, et on identifie:

$$\mathbb{S}^2_n \ni N_n \sim S_{n+1} \in \mathbb{S}^2_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

L'application $p : \tilde{X} \to X$, où $\tilde{X} = \bigsqcup S^2_n /_{\sim}$ est donnée par : $p(x_n) = x$, où $x \in S^2$ et $x_n \in S^2_n$ est le point x dans la n-ième copie de S^2.



p est clairement continue sur chaque $S^2_n \setminus \{N_n, S_n\}$. Elle est continue partout car l'application :

$$\begin{aligned} \tilde{p} : \bigsqcup S^2_n &\longrightarrow S^2 \\ x_n &\mapsto x \end{aligned}$$

est continue, donc

$$\bigsqcup S^2_n \to S^2 \to S^2/_{N\sim S}$$

est aussi continue,

et elle passe au quotient en p car $\tilde{p}(N_n) = \tilde{p}(S_n) = q$, avec $q = [N] = [S]$ dans $S^2/_{N \sim S}$.

Elle est un revêtement car si $x \neq q$, $p^{-1}(X \setminus q) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} S^2_n \setminus \{N_n, S_n\}$ et chaque composante est homéomorphe à $S^2 \setminus \{N, S\} \cong X \setminus q$ par p.

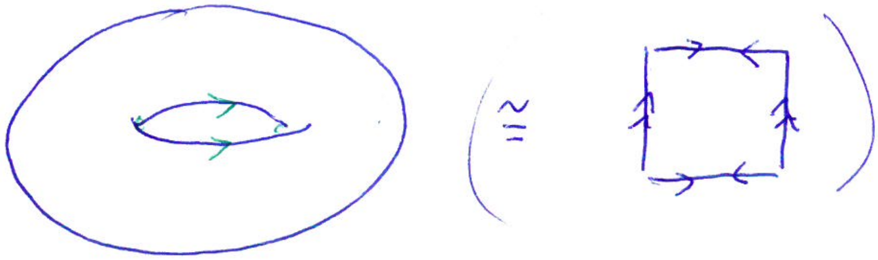
et si $x = q$, et C est l'équateur $\{z = 0\} \cap S^2$, alors $p^{-1}(X \setminus C)$

$$= \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} \Big(\underbrace{S^2_n \setminus \{z \leq 0\} \cup S^2_{n+1} \setminus \{z \geq 0\}}_{\text{composantes connexes}} \Big)$$

Enfin $\tilde{X}$ est simplement connexe : on applique encore Van Kampen au Bouquet de deux S^2, plus le fait que un lacet dans $\tilde{X}$ ne rencontre que un nombre fini de sphères.

Exo 3.

(a) X/R_1



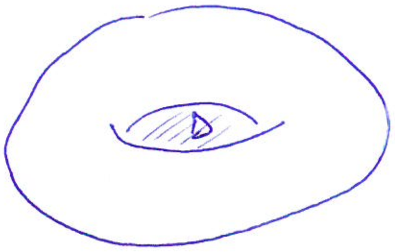
X/R_1 est homotopiquement équivalent à $S^2/\{N,S\}$, dont le groupe fondamental est $\mathbb{Z}$ par l'exercice 2.

(b) X/R_1 : En coupant le long du cercle $\{x^2+y^2=1\}\cap\{z=0\}$, et ensuite le long d'un cercle vertical, on obtient:

$X/R_{-1} \simeq$

On remarque que dans ce modèle, on a identifié tous les points verts. En utilisant Van Kampen sur $(Y\setminus 0)/\sim$ et un petit disque centré en 0, on obtient $\pi_1(X/R_-) \simeq \langle a,b \mid a^2ba^{-2}b \rangle$.

(c)



• Y est homotopiquement équivalent à $\mathbb{S}^2/_{\{N,S\}}$, en contractant D qui est contractile. Donc $\pi_1(Y) \simeq \mathbb{Z}$.

• Y_+ est homotopiquement équivalent à $\mathbb{S}^2/_{\{N,S\}}\ {}_q\!\vee_{q'} \mathbb{S}^2$, où

$q = [N] = [S]$ dans $\mathbb{S}^2/_{\{N,S\}}$ et $q' \in \mathbb{S}^2$.

Donc $\pi_1(Y_+) = \mathbb{Z}$.

• Y_- est obtenu à partir de $X/_{R_-}$ en ajoutant une 2-cellule, ce qui fait que $\pi_1(Y_-) = \langle a,b \mid a^2 b a^{-2} b ; a^2 \rangle = \langle a,b \mid a^2 ; b^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} * \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$.

On peut le voir aussi par Van Kampen, fait sur $U = Y_- \setminus \{0\}$ et V un petit disque centré en 0.

(d) $\pi_1(Y_-) \not\simeq \pi_1(Y) \simeq \pi_1(Y_+)$, donc Y_- n'est pas homotopiquement
(e).
équivalent (ni homéomorphe) à Y_+, ni à Y.

On remarque que dans Y, un point $p \in Y$ est localement homéomorphe soit à un disque de $\mathbb{R}^2$, soit à 
trois demi-disques identifiés sur le diamètre.

Dans Y_+ les points dans ∂D (après identification) ont des voisinages homéomorphes à  4 demi-disques identifiés.

Donc Y_+ et Y ne sont pas homéomorphes.

Pour comprendre si Y et Y_+ sont homotopiquement équivalents ou non, il nous faut des informations plus subtiles que le π_1.
(par exemple, le H_2)